Leseprobe aus Kapitel 1 ‚Von der Realität zur Simulation‘ des Buchs

‚Strukturbildung und Simulation technischer Systeme‘

In diesem Beispiel wird gezeigt, wie Formeln Strukturbildung numerisch berechnet werden können. Die soll sie auf die kommenden Simulationen physikalischer Systeme vorbereiten.

Weitere Informationen zum Buch finden Sie unter

strukturbildung-simulation.de

1.1 Formeln berechnen durch Simulation

Wie man Formeln mit SimApp berechnet, wird nun an Beispielen gezeigt. Dabei geht es nur um die Berechnung, nicht so sehr um die physikalische Erklärung oder Ableitung (das folgt erst in den nachfolgenden Kapiteln). SimApp ist unser Handwerkszeug dazu.

Hier werden Sie mit einem Problem konfrontiert, das Sie lösen müssen, wann immer Sie eine Struktur ermitteln wollen: Es muss zwischen Ursache und Wirkung unterschieden werden. Ursachen sind die Eingangssignale einer Struktur, die Wirkungen ihre Ausgangssignale. Was Ursache und was Wirkung ist, hängt von der Funktion eines Systems ab und den Fragen, die wir dazu stellen. Das wird oft erst durch die Struktur und mit Hilfe einer Simulation richtig verstanden. In jedem Fall aber **hilft Ihnen die Struktur** bei der Klärung dieser Frage.

In alle 5 Bänden dieser ‚Strukturbildung und Simulation technischer Systeme‘ werden physikalische Messgrößen realer Systeme berechnet. Bevor wir damit beginnen, soll gezeigt werden, wie man Gleichungen – so wie sie im Mathematik- und Physik-Unterricht vorkommen – durch Simulation numerisch berechnet.

Die folgenden Beispiele sind auch per Hand berechenbar. Das sind jedoch Sonderfälle. Reale Systeme sind meist so komplex, dass sie nur noch mit Computer-Hilfe berechnet werden können – am Übersichtlichsten durch Strukturbildung und Simulation.

1.1.1 Gleichungen und Funktionen

Eine Funktion berechnet **eine** Ausgangsgröße (oft x, y oder z) in Abhängigkeit von **beliebig vielen** Eingangsgrößen. Ein Gleichungs-System dient zur Berechnung der in den Funktionen vorkommenden unbekannten Größen.

Pythagoras

Als Beispiel für eine Funktion sei der Satz von Pythagoras genannt. Er berechnet die Hypotenuse c als Funktion der Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks.

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$$

Nach dem Satz von Pythagoras lassen sich rechte Winkel konstruieren.

Beispiel: $3^2+4^2=5^2$

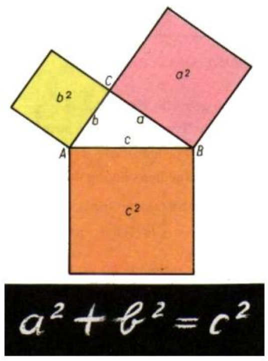


Abb. 1.1-1 Der Satz von Pythagoras

Zur Simulation dieser Funktion steht in SimApp ein **Block Fkt 2** mit zwei Eingängen in der Gruppe ‚Nichtlinear' zur Verfügung:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

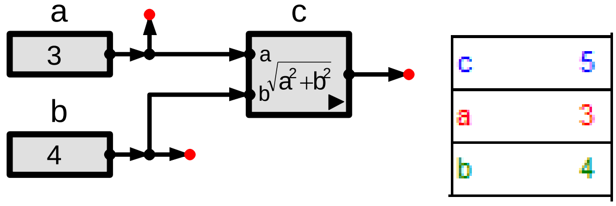


Abb. 1.1-2 Berechnung der Hypotenuse c für zwei Kateten a und b (= Seiten eines rechten Winkels) nach Pythagoras – in SimApp durch einen Funktionsblock aus der Kategorie Nichtlinear\Fkt2

Träger auf zwei Lagern

Das nächste Beispiel zur Berechnung einer Funktion stammt aus dem **Gieck, Statik, K4.** Dargestellt ist ein Balken der Länge l auf zwei Auflagern (F.A und F.B), auf den zwei Kräfte F.1 an der Stelle l1 und F.2 an der Stelle l2 wirken. Gesucht werden die Auflagerkräfte F.A und F.B.

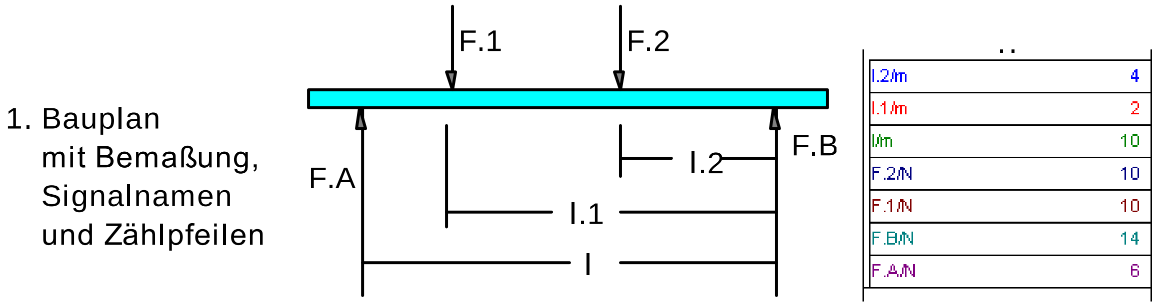


Abb. 1.1-3 8 Träger auf 2 Lagern: Zu berechnen sind die Auflagerkräfte F.A und F.B als Funktion der Last-Kräfte F.1 und F.2 und ihrer Angriffspunkte.

Die Ableitung der Formeln für F.A und F.B erfordert den Begriff des Drehmoments, der erst im Kapitel 9 Mechanik eingeführt wird. Die Lösung ist im Gieck K4, unter k25 angegeben.

m_L	Lage-	Plan-maß-stab	= wahre Länge / entspr. Länge in Zeichnung
m_F	Kräfte-		= Kraft / entspr. Länge in Zeichnung

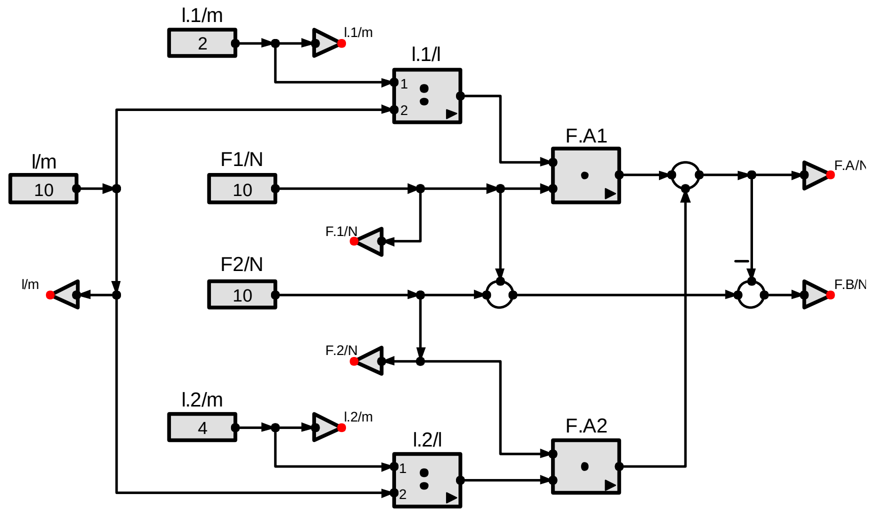
H : Polabstand $\quad y^*$: vertikaler Abstand zwischen Schlußlinie s und Seileck.

Rechn. Lösung: $F_A = F_1 \cdot l_1/l + F_2 \cdot l_2/l$; $F_B = (F_1 + F_2) - F_A$.

F.A = F.1 · l.1 / L + F.2 · l.2 / L   und   F.B = (F.1 + F.2) – F.A

Struktur zur Berechnung der Auflager-Kräfte

Wir wollen F.A und F.B nun mit SimApp berechnen. Dazu stellen wir F.A und F.B als Struktur dar:



Struktur 2-11 **A**uflager-Kräfte: L ist die Gesamt-Länge des Balkens vom Auflager A zum Auflager B. l.1 und l.2 sind die Abstände der Kräfte F.1 und F.2 vom Auflager B.

Links erkennen Sie die Parameter L, l.1 und l.2 und die Variablen F.A und F.B. Dann folgt ihre Verknüpfung gemäß den obigen Gleichungen. So entstehen rechts die Ausgangs-Signale F.A und F.B. Nun können Sie alle Eingangsgrößen beliebig variieren. Die Simulation liefert Ihnen sofort die Auflagerkräfte dazu. Zeitverhalten, die eigentliche Stärke einer Simulation, gibt es hier noch nicht.

In diesem Beispiel ist die Unterscheidung der Eingangs- und Ausgangssignale noch einfach. Eingänge sind die angreifenden Kräfte (Variable F.1 und F.2), Parameter sind die Abstände vom gewählten Nullpunkt (L, l.1 und l.2), Ausgangssignale sind die Auflagerkräfte (F.A und F.B).

Berechnung der Auflagerkräfte mit Anwender-Block

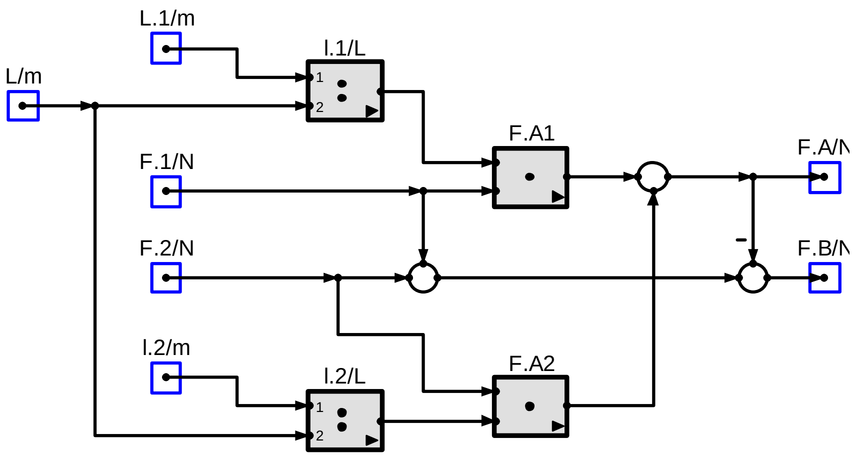


Abb. 1.1-4 Auflagerkräfte in Blockmappe: **Um aus der zuvor gezeigten Struktur einen Anwender-Block zu machen, kopieren Sie diese in eine Blockmappe. Die Monitor-Ausgänge werden gelöscht. Dann werden alle Ein- und Ausgänge durch Knoten ersetzt. Zuletzt wird das Block-Symbol gestaltet.**

Das Ergebnis sieht so aus:

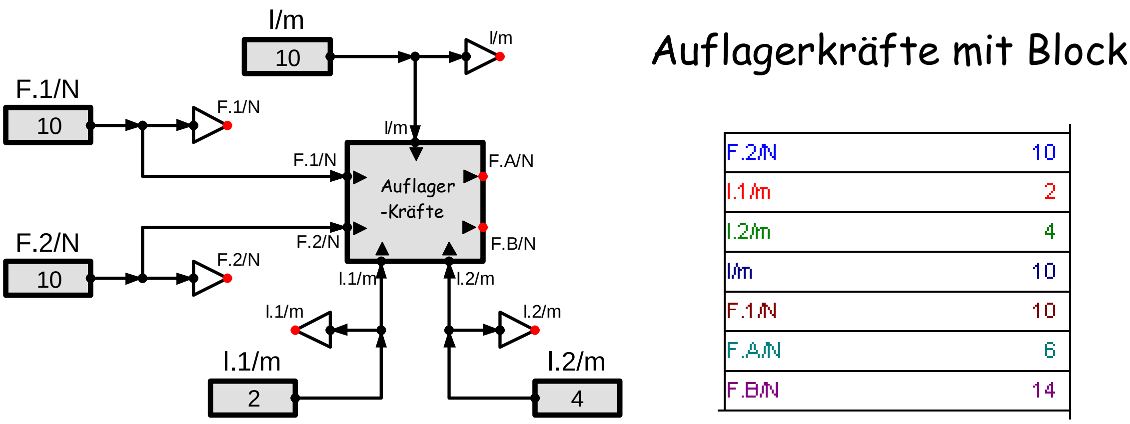


Abb. 1.1-5 Auflagerkräfte mit Block: **Einfach, schnell und übersichtlich sind die Berechnungen mit einem Anwender-Block: Anwenderblock aus der Blockmappe in die SimApp-Zeichnung exportieren, Parameter als Konstanten einstellen und die Simulation starten.**

Zum Test des Anwender-Blocks speisen wir in alle Eingänge des Blocks die Parameter und Kräfte ein und starten die Simulation.

1.1.2 Gleichung mit zwei Unbekannten

Gegeben ist das nebenstehende Gleichungs -System für zwei unbekannte x und y. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten sind lösbar. Wie, zeigt die folgende Struktur:

$$\left| \begin{array}{r} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Gl. 1 - mit K1=5} \\ \text{Gl. 2 - mit K2=15} \end{array}$$

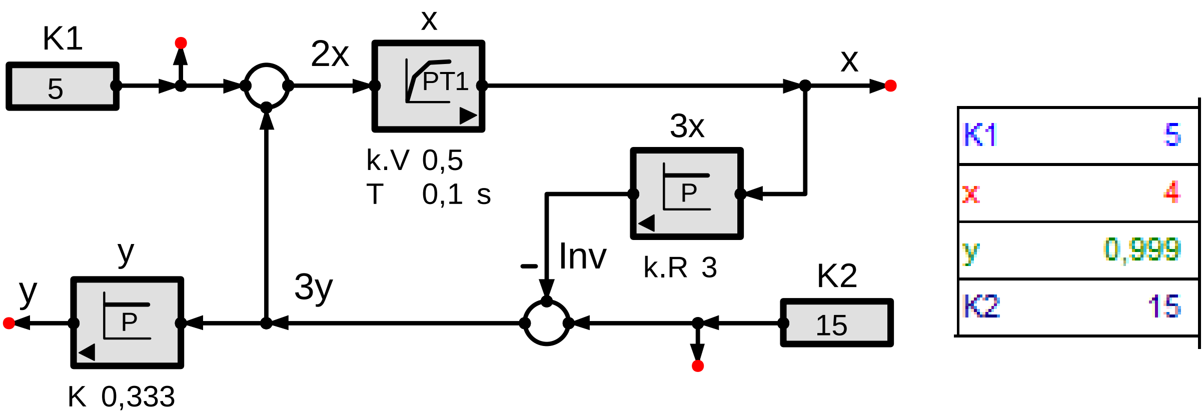


Abb. 1.1-6 Struktur zur Lösung eines Gleichungs-Systems mit zwei Unbekannten

Das Einsetzungs-Verfahren

Gegeben sind die Konstanten und Faktoren zu x und y.
Wir berechnen x und y nach dem Einsetzungs-Verfahren:

- Aus Gl. 1 erhalten wir **2x=5+3y -> x**. Das zeigt der obere Zweig der Struktur.
- Die hier noch Unbekannte 3y wird aus der zweiten Gleichung gewonnen.
  Aus Gl.2 erhalten wir **3y=15-3x -> y**. Das zeigt der untere Zweig der Struktur.
  3y wird im oberen Zweig an der linken Summierstelle benötigt.
  Dadurch schließt sich der Kreis. Er ist eine Gegenkopplung.

Die Lösungen sind x=4 und y=1. Zur Kontrolle setzt man sie sie in die Ausgangs-Gleichungen ein. Man sieht: x und y stimmen.

Zur Verzögerung im Kreis:
Der Kreis hat eine Invertierung ‚Inv‘. Dadurch **konvertiert** die Berechnung mit der Zeit. Der Endwert für x und y wird umso genauer, je länger die eingestellte Rechenzeit ist.

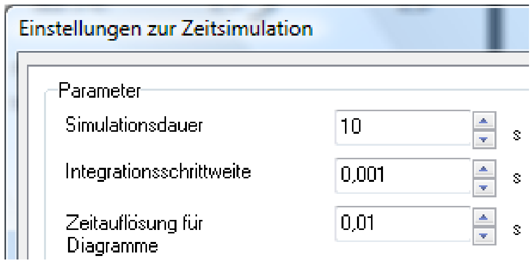


Abb. 1.1-7 Einstellung der Rechenzeit durch die Simulationsdaür in SimApp

Damit der Kreis durch Iteration berechenbar wird, benötigen alle Signale einen definierten Anfangswert. Durch die Verzögerung in Vorwärtszweig wird $x(t=0)=0$.

Die Zeitkonstante T der Verzögerung in der Struktur zur Gleichungs-Berechnung (Abbildung oben: T=0,1s) bestimmt die Genauigkeit der Simulation. Sie wird umso besser, je größer T gegen die eingestellte Simulationsdaür ist.

Wichtiger Hinweis:
Falls Sie einmal eine Struktur ohne oder mit einer geraden Anzahl von Minus-Zeichen im Kreis untersuchen, so wäre dies eine Mitkopplung. Mitkopplungen konvertieren nur in seltenen Sonderfällen, die im Kapitel 2 unter ‚Mit- und Gegenkopplungen‘ untersucht werden.

Im Allgemeinen sind **natürliche Systeme Gegenkopplungen**. Wenn Sie also eine **mitgekoppelte Struktur** erkennen, ist diese **wahrscheinlich falsch**. So unterstützt die Struktur Sie bei der Fehler-Erkennung!

1.1.3 Schiefer Turm von Pisa (Winkelfunktion)

Durch Winkel-Messungen können Entfernungen zu Punkten bestimmt werden, die direkt unerreichbar sind.

Anwendungen:
- Parallaxen-Verfahren zur Bestimmung der Entfernungen naher Himmelskörper
- Bestimmung der Breite eines Flusses oder die
- Höhen-Messung bei Gebäuden

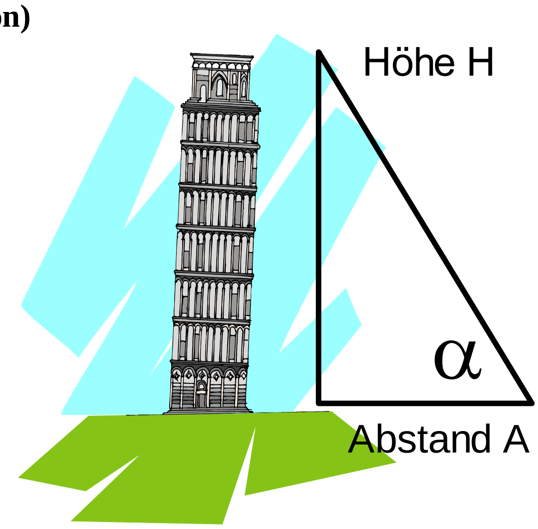


Abb. 1.1-8 Zur Bestimmung der Turm-Höhe H benötigt man den Winkel α, gemessen in einem Abstand A.

Das soll am Beispiel des Schiefen Turms von Pisa gezeigt werden.
Methode: Messung des Winkels α in einem Abstand A bis zur Spitze in der Höhe H.

$$\tan \alpha = H/A \rightarrow H = A * \tan \alpha$$

Die Struktur dazu zeigt den Algorithmus zur Berechnung der Höhe H:

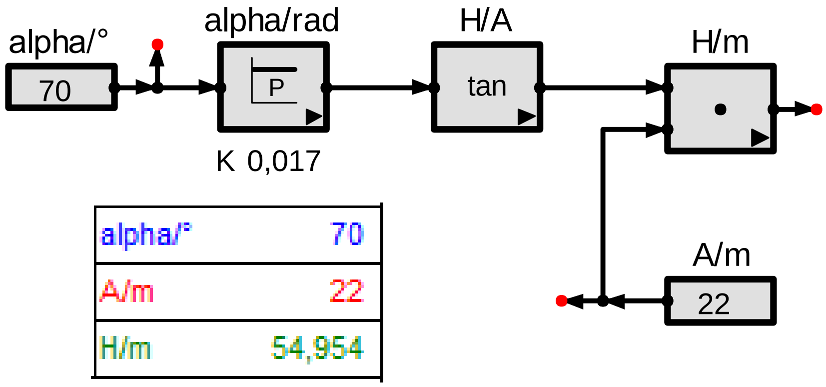


Abb. 1.1-9 Berechnung der Turm-Höhe H für einen im Abstand A gemessenen Winkel α

Zur praktischen Kontrolle: den Turm besteigen und ein Lot herunter lassen.
Das geht allerdings nur hier. Bei Sternen oder auch nur einem anderen Flussufer geht das natürlich nicht.

1.1.4 Zinseszins (Potenz-Funktion)

Die Zinseszins-Formel zur Berechnung eines Kapitals K(t) als Funktion der Zeit t lautet:

$$K(t) = K.0 * (1 + (Z/100)^{t/Jahre}$$

Darin ist **K.0 das Anfangs-Kapital** und **Z der Zinsfuß in %/Jahr**.
Die Zeit **t/Jahre = n** ist hier ein Parameter.

Einen eigenen Block zur Berechnung von Potenz-Funktionen mit extern **einstellbarem** Exponenten A hat SimApp leider nicht. Wir können die Potenz-Funktion aber durch den **Logarithmus ln** und die **Exponential-Funktion exp** (die Umkehr-Funktion zum Logarithmus) nachbilden, denn es gilt **ln(x^n) = n*ln(x).**

Das führt zu folgender Berechnung des Zinseszins:

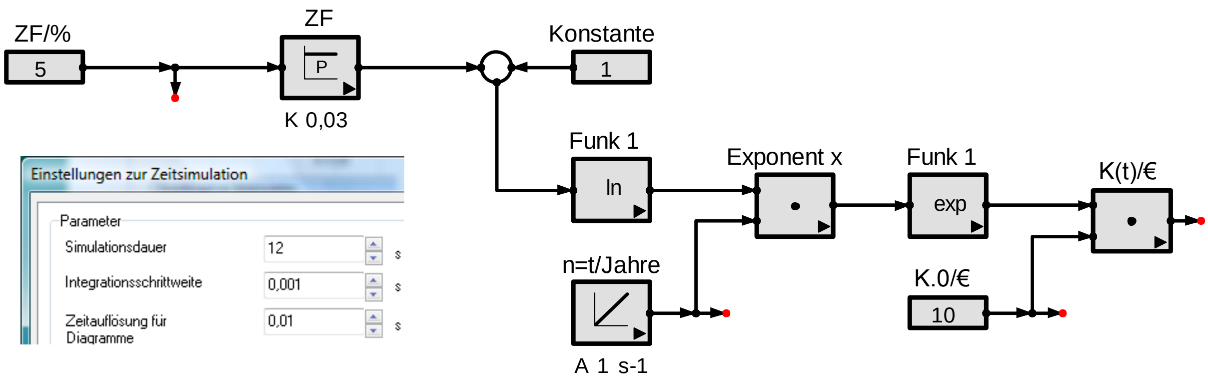


Abb. 1.1-10 Zur Berechnung einer Potenz-Funktion mit dem Exponenten n muss die Original-Funktion zürst logarithmiert werden, dann mit n multipliziert und zum Schluss wieder entlogarithmiert werden.

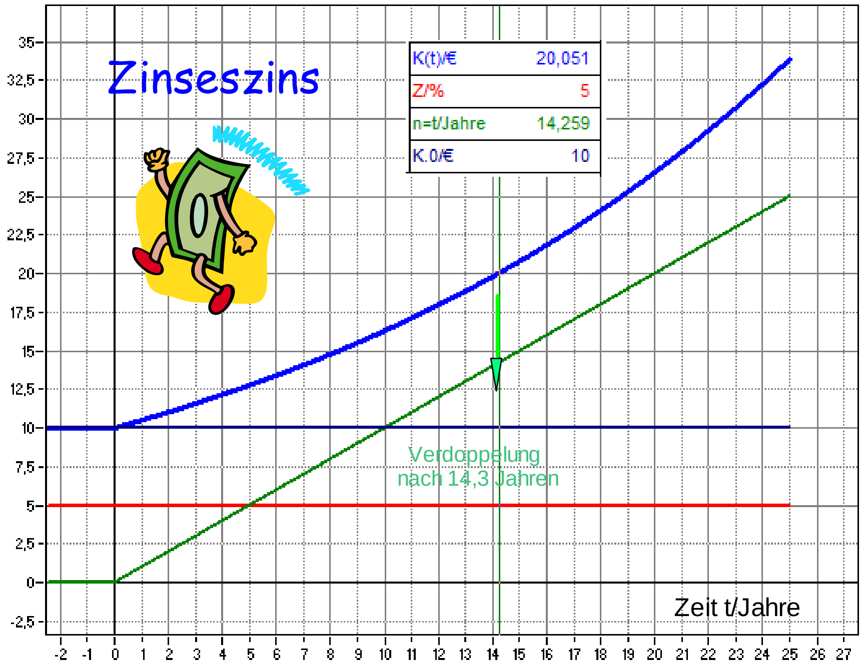


Abb. 1.1-11 Zinseszins-Berechnung: Durch Verschieben des Cursors erhält man das Kapital zu jedem Zeitpunkt innerhalb des Simulations-Intervalls. Es steigt exponentiell mit der Zeit t (in der es arbeitet) an.

Die Potenz-Funktion als Anwender-Block

Funktionen, die häufiger benötigt werden und deren Details dann nicht mehr interessieren, können in SimApp zu einem Anwenderblock zusammengefasst werden. Dazu kopiert man die getestete Funktion in eine ‚Neue Blockmappe', Seite ‚Struktur' und versieht die gewünschten Ein- und Ausgänge mit ‚Knoten'. Für die Potenz-Funktion K(t,Z) sieht die so aus:

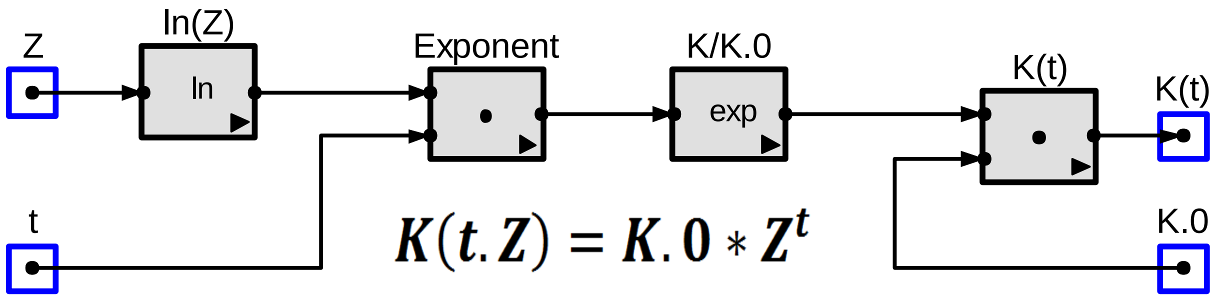


Abb. 1.1-12 Anwenderblock einer Exponential-Funktion. Der Exponent t wird nach der Logarithmierung der Basis Z multipliziert. Durch Entlogarithmierung erhält man die Funktion K(t,Z).

Danach gestaltet man in der Seite ‚Symbol' das Anwender-Symbol, speichert den Block unter einem passenden Namen ab und exportiert ihn in eine SimApp-Zeichnung.

Test des Anwender-Blocks
Durch ‚Einfügen' holt man den Anwenderblock in die neü SimApp-Zeichnung. Zum Test versieht man sie mit den erforderlichen Eingangs-Signalen. Um eine Zeit-Funktion zu erhalten, bekommt der t-Eingang eine Rampe:

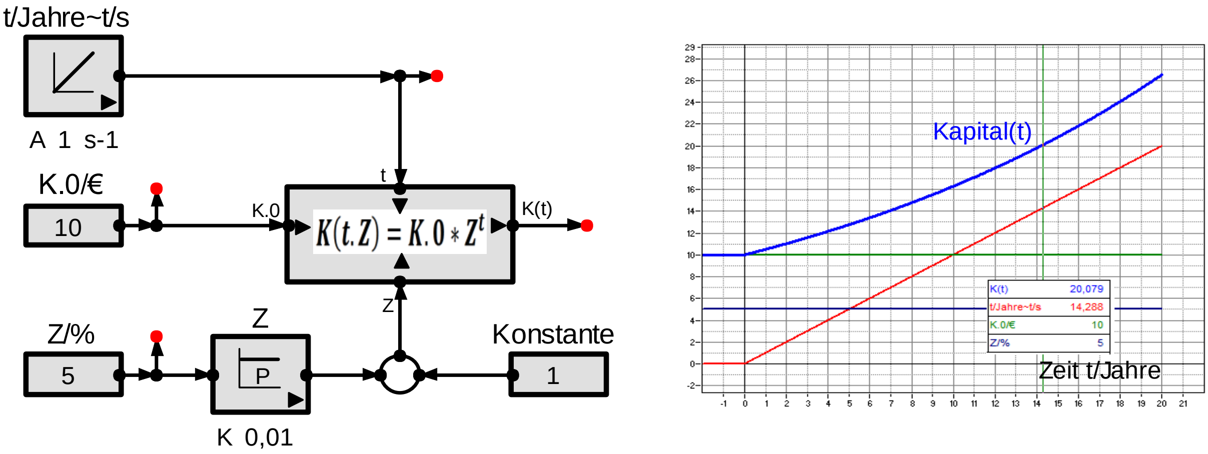


Abb. 1.1-13 Berechnung der Zinseszinsen mit dem Anwenderblock K(t,Z): Da die Zeit t in Jahren angeben werden soll, muss der Zinsfuß Z in %/Jahr eingestellt werden. Dazu kommt die Konstante 1 als Bezug.

1.1.5 Die Integration
Simulationen berechnen mathematische Funktionen durch Integration von Differenzen. Sie erreichen den Endwert durch schrittweise Annäherung an den Endwert (Iteration). Um das zu verstehen, muss erklärt werden, was eine **Integration** ist. Wir tun dies am Beispiel eines Behälters, der durch einen Zufluss befüllt und einen Abfluss geleert wird.

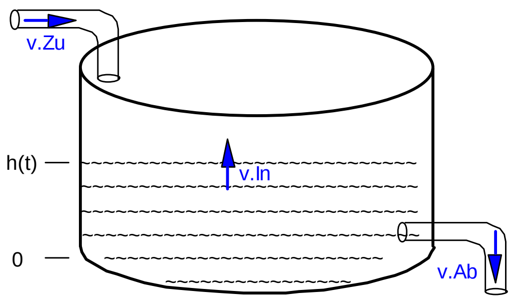


Abb. 1.1-14 Der Wassertank ändert seine Füllhöhe h bei einer Differenz der Geschwindigkeiten von Zu- und Abfluss. Warum dies eine Integration ist, wird im Text erklärt.

Zwei Möglichkeiten sind zu unterscheiden:
1. Der **Zufluss ist oben**, sodass er nicht von der Füllhöhe abhängt und
2. Der **Zufluss ist unten**, sodass der Gegendruck mit steigender Füllhöhe immer größer wird.

Beide Fälle sollen nun simuliert werden. Der dazu nötige Integrator wird zuvor kurz erklärt. Besser verstanden wird er dann durch die beiden Fall-Beispiele.

Der Integrator

Integratoren sind Speicher (hier ein Wassertank). Um sie simulieren zu können, muss ihr zeitliches Verhalten erklärt werden. Danach folgen Beispiele zur Anwendung der Integration.

Integratoren reagieren auf Amplituden an ihrem Eingang mit proportionalen **Geschwindigkeiten am Ausgang**. Das wird durch ihr **Symbol - die Rampe** – veranschaulicht:

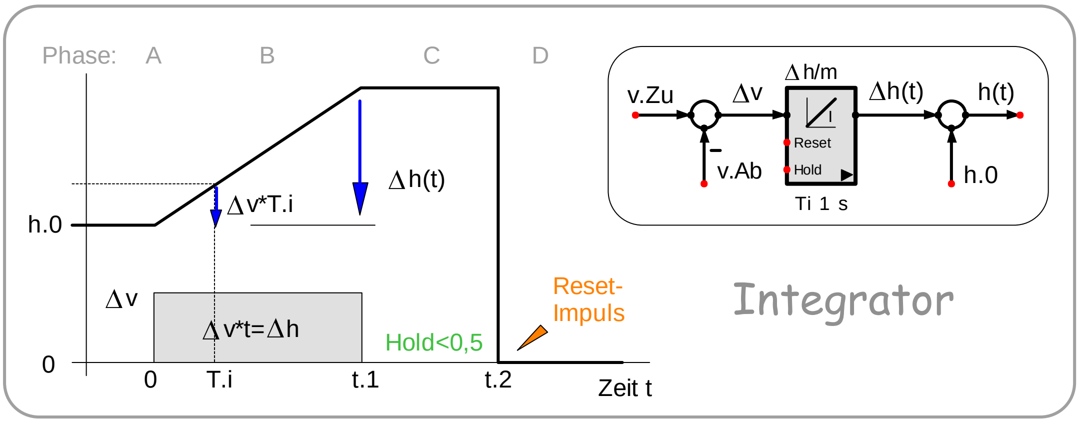


Abb. 1.1-15 Der Integrator berechnet aus der Differenz der Eingangs-Geschwindigkeiten die zeitliche Aenderung der Füllhöhe Δh(t).

Zum Test und zur Erläuterung des Integrators betrachten wir vier Phasen A bis D.

Phase A - vor t = 0:
- Zu- und Abfluss sind gleich groß (z.B. Null), ihre Differenz ist Null.
  Der Pegel h im Tank ist konstant (Anfangswert h.0).
- Durch einen Reset-Impuls kann **h.0=0** gesetzt werden. Dies entspricht der Verschiebung der h-Messlatte so, dass Null beim Anfangspegel liegt. Danach ist h(t)~Δv.

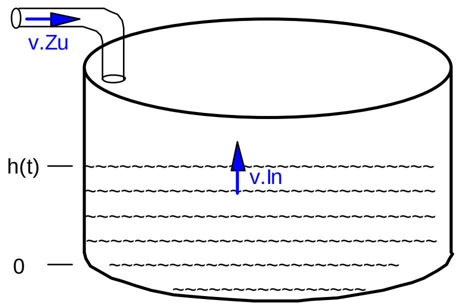
Phase B – ab t = 0:
- Die Differenz **Δv = v.Zu - v.Ab** ist konstant.
  Dann steigt der Flüssigkeits-Pegel linear mit der Zeit t an (die Geschwindigkeit Δh/Δt ist konstant).
- Die Integrations-Zeitkonstante T.i bestimmt die Geschwindigkeit, mit der der Pegel Δh/Δ im Tank ansteigt. Hier besteht die Möglichkeit der **Kalibrierung**. Für den konkreten Fall wird T.i so eingestellt, dass die Simulation mit der Realität übereinstimmt (Beispiel folgt).
  Zur Kalibrierung benötigt man zwei Punkte,
  z.B. bei t=0 ist h=0 und bei t=T.i ist Δh=Δv*T.i.

Phase C: hold
- Solange der hold-Eingang auf null gesetzt ist, ist der Integrator-Eingang Null.
  Dann bleibt der Ausgang konstant.
  Hier wird bei hold=0 die Geschwindigkeits-Differenz Δv=0. Dies entspricht der Unter-Brechung von Zu- und Abfluss. Dann bleibt der Wasserstand im Tank konstant.

Phase D: nach einem Reset-Impuls
- Durch Reset wird der Speicher schlagartig geleert.
  Der Pegel h wird Null.

Integrator ohne Ausgleich (offener Integrator)
Der beschriebene Integrator heißt auch ‚offener Integrator' oder ‚Integrator ohne Ausgleich'. Er ist vom gegengekoppelten Integrator zu unterscheiden, den wir im nächsten Punkt bespre-chen werden. Hier zunächst ein Beispiel zum offenen Integrator:

Zu 1: Simulation einer Tank-Füllung mit dem Zufluss oben
Mit dem Integrator kann der Befüllungs-Vorgang mit dem ‚Zufluss oben' simuliert werden. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass der Druck im Tank **keine Rückwirkung** auf die Zufluss-Geschwindigkeit v.u hat.



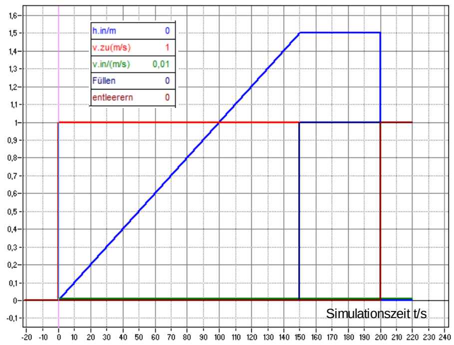


Abb. 1.1-16 Bei konstanter Zulauf-Geschwindigkeit steigt der Flüssigkeits-Pegel im Tank linear mit der Zeit an. Der Tank integriert (speichert) den Zulauf.

Simulation für den ‚ Zufluss oben' -> Integrator ohne Ausgleich

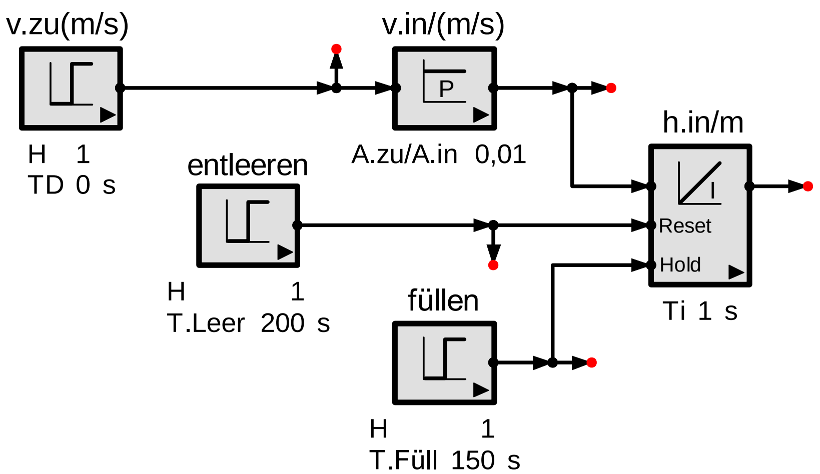


Abb. 1.1-17 Die Steuerung eines Integrators

- Bis T.Zul=150s sind Hold und Reset gleich Null. Dann läuft der Integrator hoch. Das bedeutet: der Pegel steigt.
- Ab T.Zul ist Hold=0. Das setzt den Eingang auf null, was die Füllung beendet. Dann bleibt der Ausgang (die Füllhöhe) konstant.
- Bei Taler=200s wird der Reset=1. Das setzt den Integrator-Ausgang auf null, was einer schlagartigen Entleerung des Tanks entspricht.

Die Eigenschaften des offenen Integrators

- Die Eingangs-Amplitude x.e steürt die Ausgangs-Geschwindigkeit da/dt=x.e/T.i
- Bei x.e = 0 ist x.a konstant.
- Bei x.e = Kunst ist x.a. Bei t->∞ würde x.a->∞ gehen, wenn es keine natürliche Begrenzung gäbe (z.B. ein Überlauf).

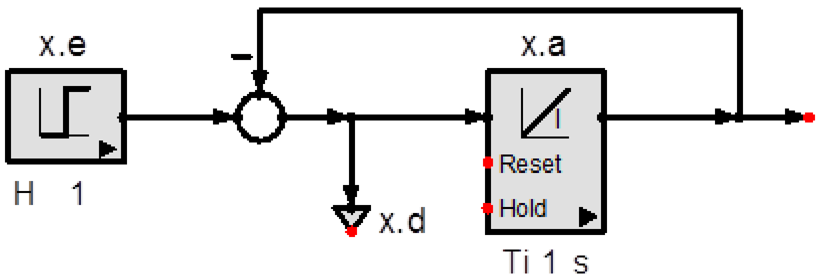
Alle Integratoren verhalten sich so wie dieser Wassertank. Wir werden dies noch an vielen Beispielen zeigen:

- Fahrzeuge integrieren die Geschwindigkeit v zum Weg s
- Wärmespeicher integrieren die Heizleistung zur Erwärmung ΔT
- Kondensatoren integrieren den elektrischen Strom i zur Ladung q
- Spulen integrieren die induzierte Spannung u zum magnetischen Fluss ϕ.

Diese idealen Integrationen nennt man auch **'ohne Ausgleich'** oder Verlust-freie Integratoren. Oft sind Integratoren jedoch Verlust-behaftet. Dann nennt man sie **Integratoren mit Ausgleich**. Das sind, wie nun gezeigt werden soll, **Verzögerungen**.

Der Integrator mit Ausgleich (Verzögerung)

Gegengekoppelte Integratoren heißen ,Integrator mit Ausgleich'. Die folgende Simulation zeigt, dass der Integrator durch eine Gegenkopplung zu einem Proportionalglied mit Verzögerung wird. Wir betrachten zürst den einfachsten Fall: die direkte Gegenkopplung.



Signale bei t=T.i

t=s	1
x.d	0,3677
x.a	0,6323

Abb. 1.1-18 Der einfachste Fall einer Verzögerung: der direkt gegengekoppelte Integrator. Wenn er genug Zeit hat (statisch), geht das Differenz-Eingangs-Signal gegen Null. Daraus folgt: x.a geht gegen x.e. Technisch ist dies eine Nachlauf-Regelung.

Bei konstantem Eingangs-Signal x.e läuft das Differenz-Signal x.d des Integrators nach einer abklingenden Exponential(e)-Funktion nach Null (abklingende e-Funktion). Dadurch läuft der Integrator-Ausgang x.a nach einer aufklingenden e-Funktion gegen den Endwert (hier x.a=x.e). Das ist ein **natürlicher Ausgleichst-Vorgang.** Entsprechend ist das Ausgangs-Signal (die Sprungantwort) eine aufklingende e-Funktion. Ihre Langsamkeit beschreibt die Verzögerungs-Zeitkonstante T.V.

Bei direkter Gegenkopplung ist **T.V=T.i.**

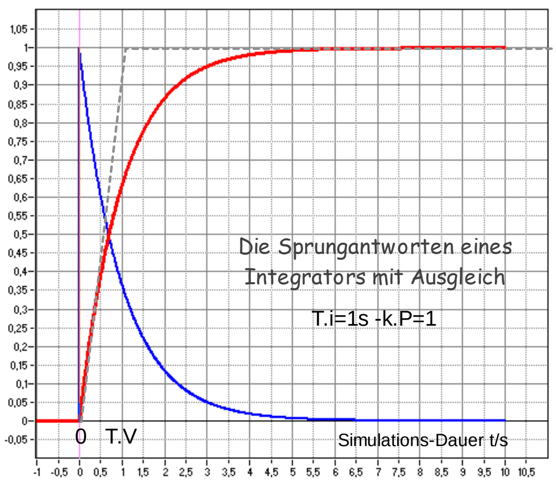


Abb. 1.1-19 Die Sprungantwort des direkt gegen-gekoppelten Integrators ist eine aufklingende Exponential(e)-Funktion.

Das Verhalten des Integrators mit Ausgleich bei direkter Gegenkopplung

- Der Integrator macht sein Eingangs-Signal x.d=x.e-x.a mit der Zeit zu Null.
- Deshalb ist der Endwert x.a(t->∞) = x.e
- Der Endwert stellt sich mit der Verzögerung des Integrators ein: T.V=T.i.

Variation der Gegenkopplung k.P

Nun soll untersucht werden, wie sich der gegengekoppelte Integrator verhält, wenn die Rückkopplung ungleich 1 ist. Gesucht werden

- die Verstärkung des Systems und
- seine Zeitkonstante T.V.

In der Realität entspricht dies einer Messung des Ausgangs-Signals x.a mit der Messwandler-Konstanten k.P. Der Integrator vergleicht das Eingangs-Signal x.e mit dem rückgekoppelten Signal x.r = k.P*x.a.

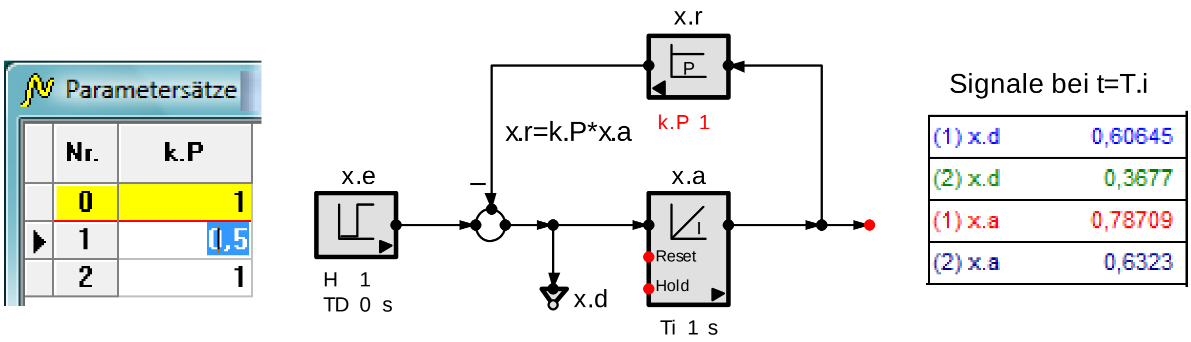


Abb. 1.1-20 Untersuchung des Integrators bei Teilung der Gegenkopplung: Je stärker die Teilung, desto größer sind der Endwert und die Verzögerung.

Dies ist das Simulations-Ergebnis für die Parameter-Variation:

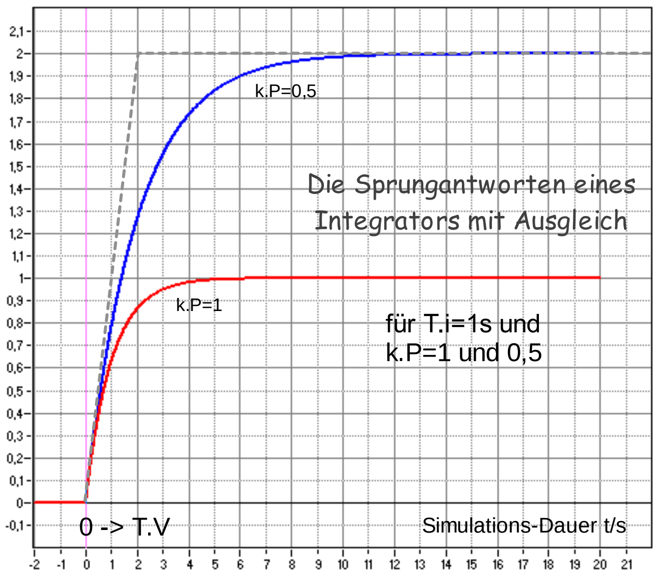


Abb. 1.1-21 Bei Teilung der Gegenkopplung wird das Ausgangs-Signal größer und langsamer – und umgekehrt.

Die Eigenschaften des Integrators mit Ausgleich

- Bei proportionaler Gegenkopplung macht der Integrator ein Eingangs-Signal x.d=x.e-x.a mit der Zeit zu Null.
- Im Endzustand ist x.r=k.P*x.a=x.e. Daraus folgt **x.a(t->∞)=x.e/k.P.**
  Der Endwert wird umso größer, je kleiner k.P ist. Das zeigt die obige Sprung-Antwort bei großen Zeiten.
- Die Verzögerungs-Zeitkonstante T.V wird umso größer, je höher der der Endwert von x.a ist – d.h., je kleiner k.P ist. Das liegt daran, dass die Anfangs-Geschwindigkeit Doxa/dt=x.e/T.i unabhängig von x.a ist.
  Aus
  $$\frac{dx.a}{dt}=\frac{x.a}{T.V}=\frac{k.p*x.e}{T.V}=\frac{x.e}{T.i}$$
  folgt **T.V=T.i/k.P.**

Die Verzögerung T.V, mit der der Endwert erreicht wird, ist umso größer, je kleiner k.P ist. Das zeigt die obige Sprung-Antwort bei kleinen Zeiten.

Simulation einer Tank-Füllung für den , Zufluss unten'

Als Beispiel für einen Integrator mit Ausgleich nennen wir die Befüllung eines Tanks, bei dem der Zufluss unten liegt. Dann steigt der Gegendruck der Zuleitung mit der Füllhöhe h an. Dadurch wird die Zufluss-Geschwindigkeit mit der Zeit immer kleiner. Das kann dazu führen, dass der Zufluss völlig zum Stillstand kommt. Das wird auch die Simulation zeigen.

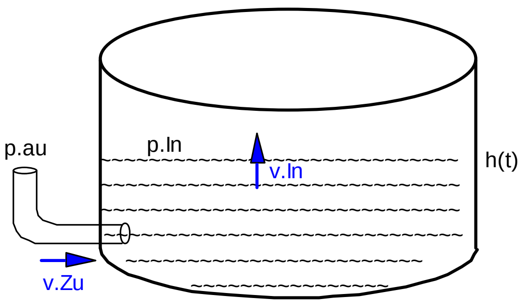


Abb. 1.1-22 Befüllung eines Tanks so, dass der Gegendruck mit steigender Füllhöhe zunimmt. Im Text wird erklärt, warum dies eine Integration mit Ausgleich ist.

Das Kontinuitäts-Gesetz

Zur Berechnung der Strömungs-Geschwindigkeit im Rohr benötigen wir die **Kontinuitäts-Gleichung**. Sie gilt für inkompressible Flüssigkeiten bei Querschnitts-Änderung und besagt, dass das sich die **Strömungs-Geschwindigkeiten v.1 und v.0** reziprok zu den **Querschnitten A.1 und A.0** verhalten:

v.1/v.0 = A.1/A.0

Das ist so zu verstehen:
Weil Flüssigkeiten inkompressibel sind, steigt das Volumen im Tank **ΔTank = A.0*Δh**
durch das Rohr im Rohr zufließende Volumen **ΔRohr = A.1*Δx.**
Entsprechendes gilt für die Geschwindigkeiten v.0=dh/dt und v.1=dx/dt oder
A.0*v.0 = A.1*v.1.
Daraus folgt das oben angegebene Verhältnis zwischen den Querschnitten und den Geschwindigkeiten.

Berechnung des Befüllungs-Vorgangs
In der Struktur zeigt sich die Druck-Rückwirkung durch die Gegenkopplung des Integrators ‚Tank‘:

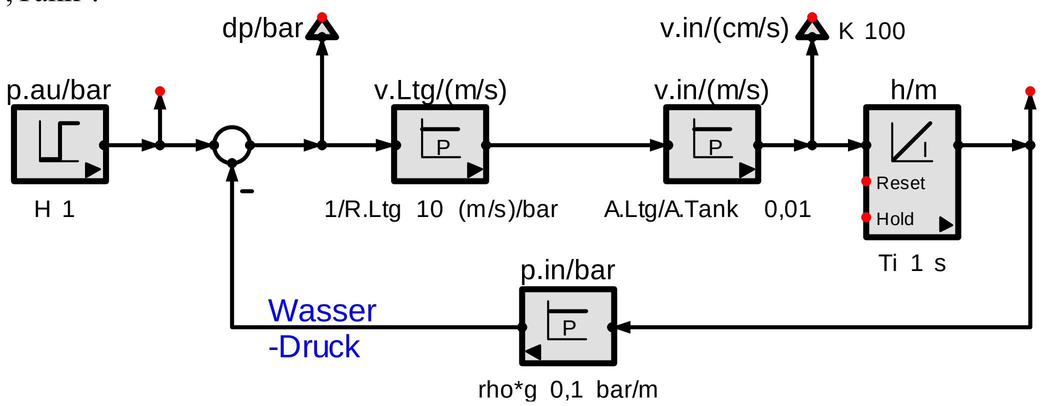


Abb. 1.1-23 Struktur zur Tank-Befüllung mit steigendem Gegendruck

Erläuterungen zur Tank-Befüllung

- Zu berechnen ist der Zusammenhang zwischen Drücken und Strömungs-Geschwindigkeiten. Drücke p=G/A sind der Quotient aus dem **Gewicht G=m***g (m=Masse, g=Erdbeschleunigung). Die physikalische **Einheit von p ist das Pasqual Pa=N/m².** Weil das für technische Zwecke zu klein ist, wird meist mit der Druck-Einheit **bar=10N/cm²** gearbeitet. **1bar=10000Pa** oder 1Pa=0,1mbar.
- Für das Befüllen und Entleeren des Tanks sind nur die Druck-Unterschiede zur Umgebung wichtig. Daher kann der Umgebungsdruck p.Umg=0 gesetzt werden.
- Die Geschwindigkeit v.Ltg in der Zufluss-Leitung hängt vom Unterschied Δp=p.au-p.in zwischen dem **Außendruck p.au** und dem **Innendruck p.in** und dem **Widerstand R.Ltg** der Zuleitung ab: **v.Ltg=Δp/R.Ltg .**

  Hydraulische Widerstände sind das Verhältnis aus Druck-Differenz **=Δp** und der Strömungs-Geschwindigkeit:

  R.Hyd==Δp/Δv – z.B. in bar/(m/s)

  Das ist das **Ohmsche Gesetz der Hydraulik.**
  Leitungs-Widerstände sind nur bei laminarer Strömung konstant und dann minimal. Laminarität ist nur bei kleiner Strömungs-Geschwindigkeit gegeben. Das wird hier vorausgesetzt.
  Strömungs-Widerstände in Rohr-Leitungen werden im Kapitel 12 ‚Pneumatik/Hydraulik‘ Teil 5) berechnet.
  Zur Simulation wird hier angenommen: **R.Ltg=0,1(m/s)/bar** -> 1/R.Ltg=10(m/s)/bar.
- Die Geschwindigkeit **v.in, mit der der Pegel im Tank** ansteigt, ist proportional zur Strömungs-Geschwindigkeit **v.Ltg in der Zuleitung**.
- Bei konstanter Dichte ρ ist v*A=konstant **(Kontinuitäts-Gesetz**). Daraus folgt, dass sich die Geschwindigkeiten reziprok zu den Qürschnitten A verhalten: **v.in/v.Ltg=A.Ltg/A.in**
  In unserem Beispiel wurde **A.Ltg/A.in=1%** angenommen.
- Der Innendruck **p.in=G/A.in=ρ*g*h** ist proportional zur Füllhöhe h.
  Der Proportionalitäts-Faktor **ρ*g** ist das Produkt aus der **Flüssigkeits-Dichte** ρ und der **Erd-Beschleunigung g**. Der Einfachheit halber rechnen wir hier mit **g=10m/s².**

Für Wasser ist **ρ=1kg/lit**. Damit wird **ρ*g=0,1bar/m**. Das bedeutet, dass der Wasserdruck **pro 10m um 1bar** steigt.

Das Simulations-Ergebnis

Mit diesen Werten wird der anfangs leere Tank nach einer Exponential-Funktion gefüllt. Er ist ein Integrator mit Ausgleich.

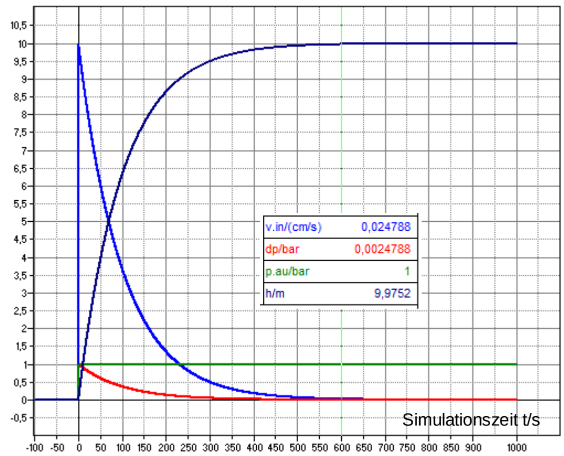


Abb. 1.1-24 Das Simulations-Ergebnis einer Tank-Füllung mit Zufluss unten.

Menge und Volumen im Tank

Wenn man an der im Tank enthaltenen **Flüssigkeits-Menge m=ρ*V**ol interessiert ist, muss das Volumen Vol=A.In*h berechnet werden. Dazu wird der Innere Qürschnitt A.in des Tanks benötigt. Die Berechnungen dazu sehen Sie im nächsten Bild.

Tank-Entleerung

Nun soll der umgekehrte Vorgang simuliert werden:
Anfangs ist der Tank bis zu einer Höhe h.0 gefüllt. Dann wird das Auslass-Ventil geöffnet und der Tank-Inhalt fließt in die Umgebung ab.

Simulation der Tank-Entleerung

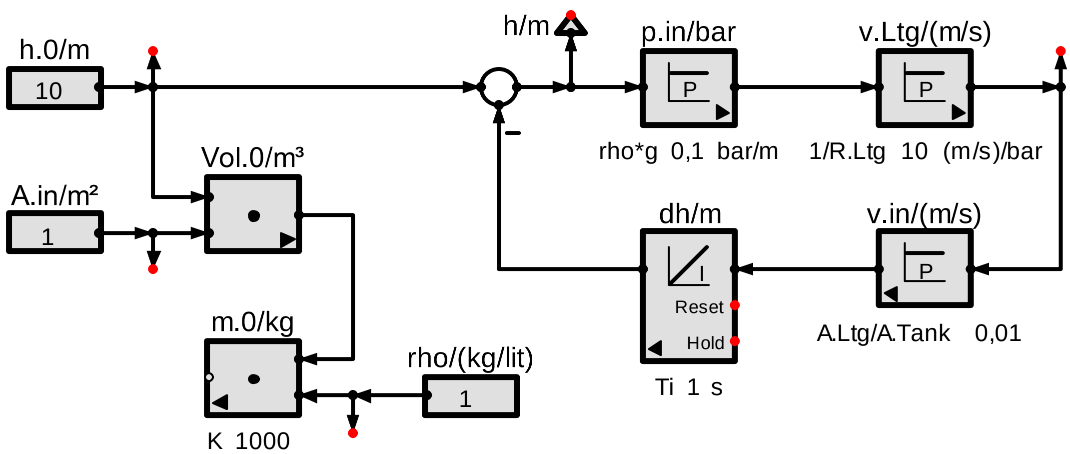


Abb. 1.1-25 Berechnung des Entleerungs-Vorgangs – links: die Anfangswerte für die Füllhöhe h und das zugehörige Volumen und die Masse der gespeicherten Flüssigkeit

Das Simulations-Ergebnis der Tank-Entleerung

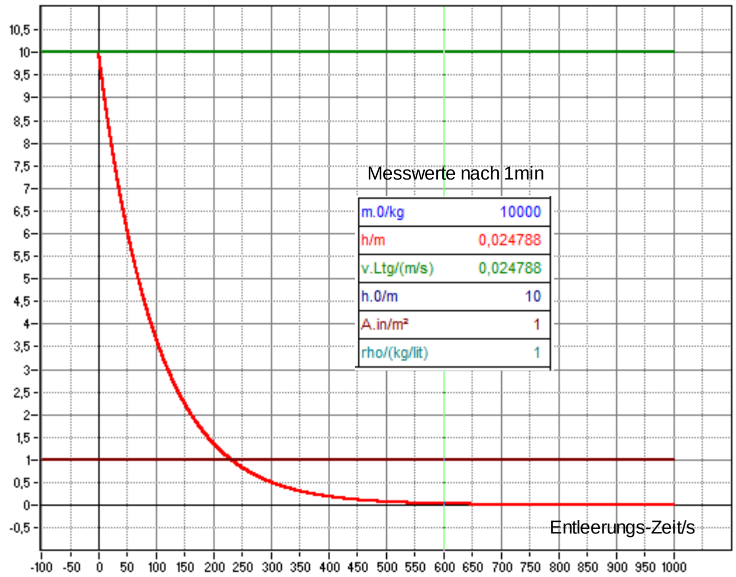


Abb. 1.1-26 Da der Innendruck mit fortschreitender Entleerung des Tanks immer kleiner wird, verläuft die Entleerung nach einer abklingenden e-Funktion. Ihre Zeitkonstante bestimmt der Leitungs-Widerstand des Abflusses.

Der Goldene Schnitt

Nun soll gezeigt werden, dass mit einem Integrator Gleichungen nach dem **Gleichsetzungs-Verfahre**n gelöst werden können. Als erstes Beispiel dient der Goldene Schnitt.

Der Goldene Schnitt ist seit der griechischen Antike der Inbegriff der Harmonie. Man findet man ihn z.B. in der Baukunst.

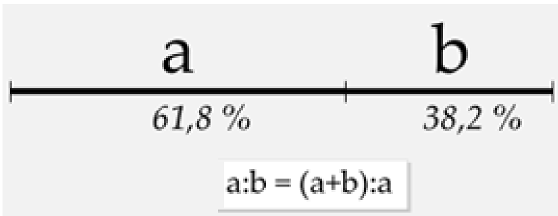


Abb. 1.1-27 Teilung einer Strecke nach dem Goldenen Schnitt: berechnet werden soll das Teilungs-Verhältnis a/b.

Berechnung des Goldenen Schnitts nach dem Gleichsetzungs-Verfahren

Eine Strecke c=a+b ist nach dem ‚Goldenen Schnitt‘ geteilt, wenn sich die **größere Stecke a** zur **kleineren Strecke b** genauso verhält wie die ganze Strecke **c=a+b** zum größeren Abschnitt a.

Hier sollen die Anteile a und b für den Goldenen Schnitt nach dem **Gleichsetzungs-Verfahren** berechnet werden. Dazu muss der Goldene Schnitt als **Nullsumme** geschrieben werden:

Aus $\mathbf{a/b = (a+b)/a}$ wird $\mathbf{(a+b) - a^2/b = 0.}$

Die Null erzeugt ein entsprechend dieser Gleichung gegengekoppelter Integrator mit dem **Eingang Dif = (a+b) - a²/b**. Das zeigt die folgende Struktur:

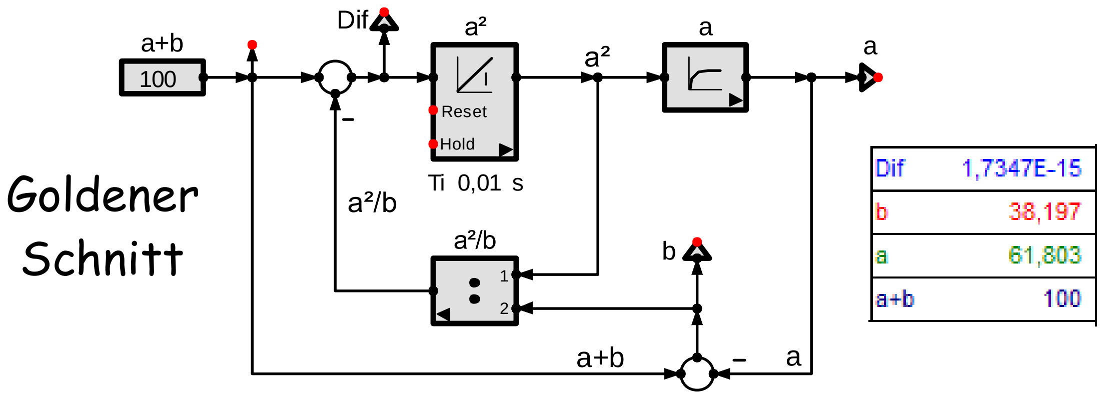


Abb. 1.1-28 Beim Goldenen Schnitt ist a+b=a²/b. Der Integrator macht die Differenz Dif=(a+b)-a²/b zu null. Das liefert die beiden Anteile a und b. Hier ist a+b=100 angenommen worden. Damit erhält man die Abschnitte a und b als Anteil von c=a+b in %.

1.1.6 Die quadratische Gleichung

Mit Hilfe des Integrators lassen sich Geleichungen nach dem Gleichsetzungs-Verfahren lösen. Als erstes Beispiel dazu nehmen wir eine quadratische Gleichung.

Normalform: $x^2 + a1 * x + a0 = 0$

Sie hat eine große Lösung x.1 und kleine Lösung x.2:

$$x.1 = -a1/2 + \sqrt{(a1/2)^2 - a0} \quad \text{und} \quad x.2 = -a1/2 - \sqrt{(a1/2)^2 - a0}$$

Welche der beiden Lösungen praktisch relevant sind, zeigen immer nur konkrete Beispiele.

Zahlenwerte: a0 = -8; a1=-2 -> x.1= +2; x.2=-4

Das Gleichsetzungs-Verfahren

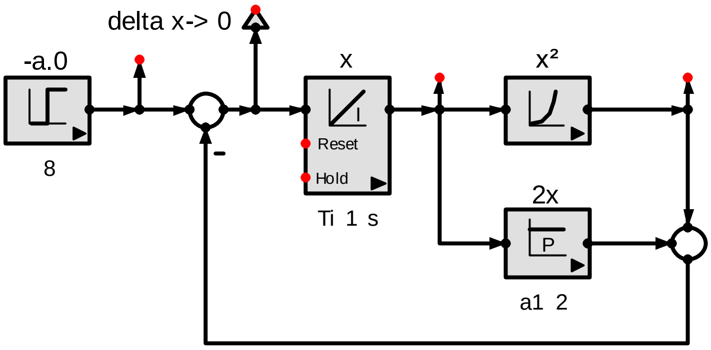
Um die quadratische Gleichung zu lösen, muss der x-abhängige Teil der quadratischen Gleichung an den x-unabhängigen Teil angepasst werden.

$$0 = x^2 + 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x = 8$$

Die Zeit-Transformation

Bei der Simulation wird die unabhängige Variable x durch die relative **Zeit t/T.i** vertreten (x wird in t transformiert). Da die Zeit t nur positiv sein kann, berechnet die Transformation auch nur die positive Lösung von x.

Struktur zur Simulation einer quadratischen Gleichung
Mit Hilfe eines Integrators, der x~t solange vergrößert, bis die linke Seite der Gleichung gleich der rechten geworden ist, wird diese Gleichung gelöst (**Gleichsetzungs-Verfahren**).



delta x-> 0	5,3776E-17
-a.0	8
x	2
x²	4

Abb. 1.1-29 Numerische Berechnung einer quadratischen Gleichung durch Integration: Dargestellt ist nur die positive Lösung, weil x^2 nur positiv sein kann.

1.1.7 Mittelwerte

Durch Mittelung einer Funktion wird ihre Fläche (das Integral) gleichmäßig über eine **gewählte Zeit-Basis T** verteilt. In der Technik werden häufig die Mittelwerte von Zeitfunktionen benötigt (die **Zeit t** ist die unabhängige Variable), z.B. zur Glättung verrauschter Signale. Der Mittelwert jeder null-symmetrischen Funktion ist Null, der Mittelwert einer zeitlich konstanten Funktion ist der Momentan-Wert selbst. Der Mittelwert einer Dreiecks-Funktion von 0 bis zur halben Periode ist der halbe Spitzenwert x.max/2 (siehe Abbildung).

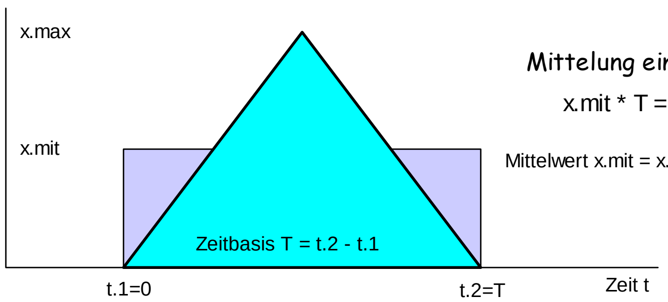


Abb. 1.1-30 1 Strukturbildung\Formeln\10 Mittelung einer Dreiecks-Funktion: Hier ist der Mittelwert gleich dem halben Maximalwert.

Die Mittelwert-Bildung soll am Beispiel einer Geschwindigkeit v(t) erläutert werden. Gesucht wird zunächst die sich aus einer Geschwindigkeit v(t) ergebende **Wegänderung Δx.**
Bei konstanter Geschwindigkeit v wäre die Berechnung einfach: **Δx = v·Δt.** Ist v jedoch nicht konstant, kann die Berechnung schwierig werden (Integration, siehe Kapitel 3 Dynamik).
Kennt man jedoch den **Mittelwert (v.mit)**, so wird die Weg-Berechnung wieder einfach. Mit der Intervallzeit T der Mittelung wird der zurückgelegte Weg

$$\Delta x = v.mit \cdot T$$

Der Mittelwert v.mit verteilt die Fläche unter der Zeitfunktion v(t) gleichmäßig über die gewählte Zeitbasis T = t.2 – t.1. Daher ist der Mittelwert von v die Fläche unter der Funktion v(t), geteilt durch die Zeitbasis T: **v.mit = Δx/T.**

Zahlenwerte: Die Geschwindigkeit einer Achterbahn steigt in 10s von 0 auf 72km/h und fällt in der gleichen Zeit wieder auf null. Gesucht wird der zurückgelegte Weg Δx in m und die mittlere Geschwindigkeit.

Wegen des dreieckigen Verlaufs von v(t) wird v.mit = v.max/2 => 36km/h = 10m/s. Die Zeitbasis T ist hier 2 · 10s = 20s. Daraus ergibt sich eine Strecke **Δx = 200m.**
Damit eine Mittelung funktioniert, muss die Zeitbasis groß gegen die längste Signal-Periode eingestellt werden. Mit anderen Worten: gemittelt werden nur schnelle Signal-Änderungen. Was schnell ist, bestimmt die gewählte Zeit-Basis T.

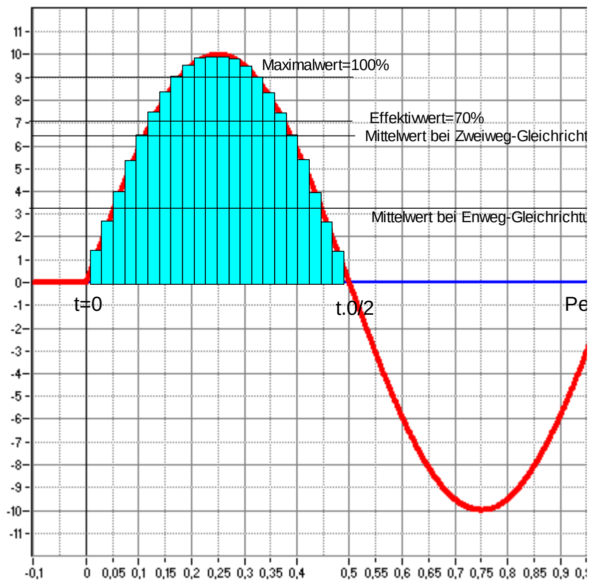
1.1.8 Die Sinus-Schwingung

In der gesamten Natur und Technik spielen periodische Vorgänge eine wichtige Rolle. Besonders häufig sind harmonische, d.h. sinusförmige Schwingungen. Z.B. verläuft der Pegelstand von Ebbe und Flut relativ zum Mittelwert sinusförmig. Sich drehende Generatoren erzeugen sinusförmige Spannungen. Daher – und weil sie in komplexer Form ohne höhere Mathematik besonders leicht zu berechnen sind - werden Sinus-Schwingungen auch in dieser Strukturbildung eine wichtige Rolle spielen.

Zur Charakterisierung müssen Sie die Merkmale einer zeitlichen Schwingung kennen. Sie heißt hier z.B. x(t):

1. ihre Form, z.B. Dreieck, Sinus, Rechteck für die Momentanwerte x(t)
2. die Amplitude x.max als Maß für die Stärke der Schwingung
3. die Periodendauer t.0 als Maß für die Langsamkeit oder umgekehrt

   die Frequenz f = 1/t.0 als Maß für die Schnelligkeit der Schwingung.



$$\bar{x} = x..mit = x.\max/\ \pi = x.eff\ * \sqrt{2}\,/\,\pi$$

mit √2/π = 0,45

Netzspannung:
230V (effektiv) -> 324V (Spitze)

Einweg-gleichgerichtet: 103V

Zweiweg-gleichgerichtet: 206V

Abb. 1.1-31 1 Strukturbildung\Formeln\1 Zeitlicher Mittelwert einer Sinus-Funktion: **Mittelwert einer sinusförmigen Halbwelle als Fläche unter der Kurve, geteilt durch ihre Dauer T/2. Die Zeitfläche wird durch Integration errechnet, ersatzweise durch die Summe schmaler Rechtecke unter der Kurve.**

Beispielsweise verläuft die Spannung unserer elektrischen Stromversorgung (Netzspannung) sinusförmig mit einer Frequenz von **50Hz**, entsprechend einer Periodendauer von **20ms**. Ihre Höhe (der Betrag) wird als **Effektivwert** angegeben: hier **230V**. Effektivwerte sind das Leistungs-Äquivalent einer oszillierenden physikalischen Größe. Einzelheiten dazu erfahren Sie im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

Beispiel: Netz-Trafo
Elektronische Schaltungen der Analog- und Digital-Technik werden mit Gleichspannungen betrieben. In der Steuerungs-Technik sind 24V üblich. In der Mess- und Regelungstechnik, wo positive und negative Signale zwischen +10V und -10V verarbeitet werden müssen, versorgt man meist +12V und -12V gegen ein Bezugspotenzial, genannt 0V oder Masse. In der Digital-Technik wird meist mit 5V gearbeitet.

Wann immer es möglich ist, möchte man diese Spannungen aus dem überall verfügbaren 230V-Wechselstromnetz gewinnen. Dazu sind Umspanner erforderlich (Transformatoren, kurz Trafos). Für Netzgeräte stellen sie Kleinspannungen bis zu einigen 10V(effektiv) zur Verfügung. Das ist ungefährlich, passt zu den Erfordernissen der Elektronik und kann bei geeigneter Gleichrichtung und Stabilisierung Batterien ersetzen. Einzelheiten zu diesem Thema finden Sie im **Kapitel 8 Elektronik\Schaltungstechnik**.

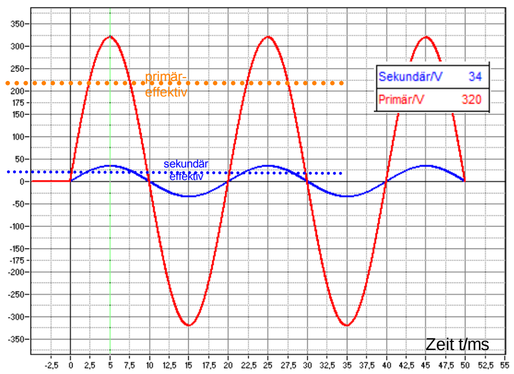


Abb. 1.1-32 Trafos dienen zur Umspannung und galvanischen Trennung von Wechsel-Spannungen. Ihre Amplituden werden als Effektivwerte angegeben.

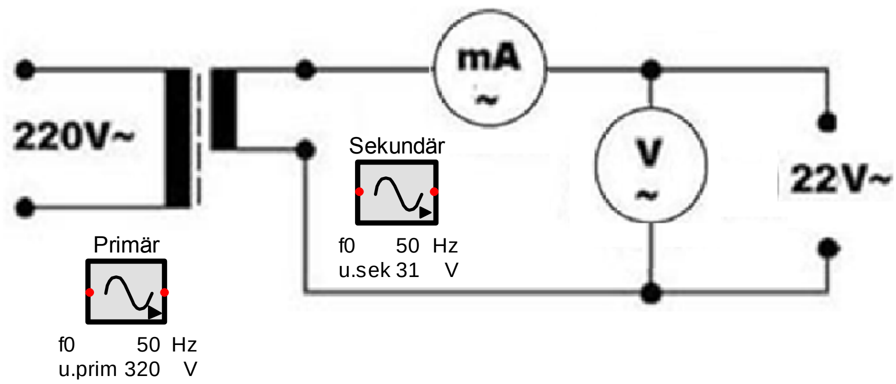


Abb. 1.1-33 Transformatoren sind Umformer für Wechselspannungen, die als Effektivwert angegeben werden. Der Begriff wird im Text erklärt.

Die Kennwerte einer Sinus-Schwingung

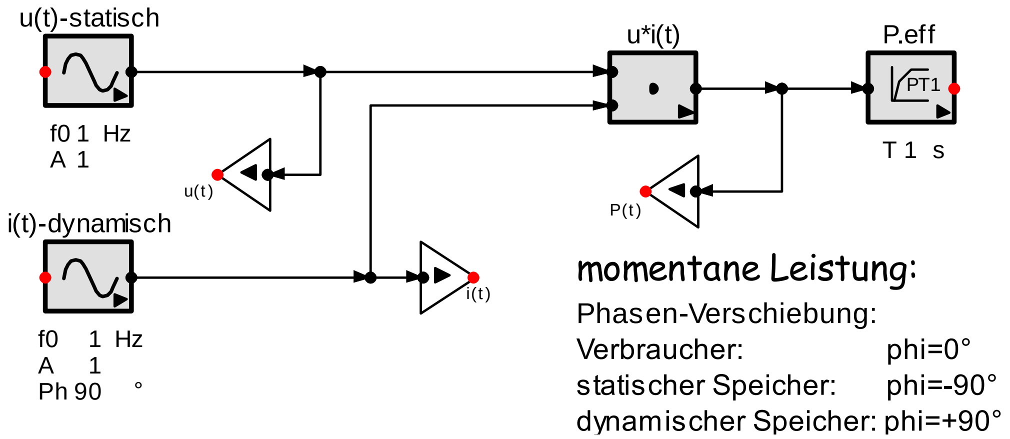
In der Elektronik ist die Kenntnis von Momentan- und Maximalwerten erforderlich. In der Energietechnik, wo allein das Leistungs-Vermögen interessiert, rechnet man mit Effektivwerten. Der Trafo ist die Schnittstelle. Für die Berechnung und Simulation von Transformatoren müssen die Zusammenhänge zwischen Effektivwerten (große Buchstaben) und Momentanwerten (kleine Buchstaben) bekannt sein.

Zur Berechnung der geglätteten Gleichrichter-Spannung benötigen wir den Mittelwert einer Sinus-Funktion, genannt Gleichrichtwert. Er berechnet sich bei Sinus-Schwingungen aus ihrem **Maximalwert x.max**, geteilt durch die **Kreis-Konstante** $\pi \approx$ **3,14**. Damit erhalten wir die **x·t-Fläche (=Integral)** unter einer Sinus-Halbwelle aus dem **Maximalwert x.max** und der halben Periodendauer t.0/2:

$$\mathbf{x.mit = (2/\pi)\cdot x.max = 64\%\cdot x.max}$$

Bei Einweg-Gleichrichtung wäre der Mittelwert die Hälfte: **x.mit = x.max/π ≈ 32%·x.max.**

Struktur zur momentanen und effektiven Leistung



Struktur 2-12 Die momentane Leistung schwingt mit doppelter Frequenz. Ihr Effektivwert ist der Mittelwert des Produkts aus Spannung und Strom.

Zeitliche Verläufe zur momentanen und mittleren Leistung

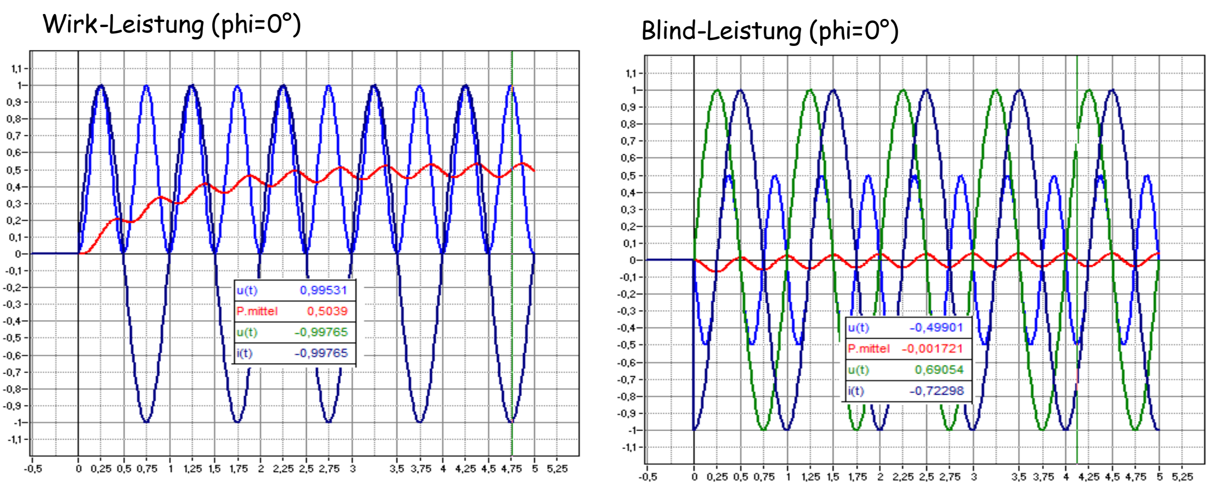


Abb. 1.1-34 Momentane und effektive Leistung: Links: Die reelle Leistung eines Verbrauchers. Der dynamische und der statische Anteil sind phasengleich. Die gemittelte Leistung ist größer als Null. Rechts: Die Blind-Leistung eines Speichers: Der dynamische Anteil ist gegenüber dem statischen um 90° verschoben. Die gemittelte Leistung ist 0.

Zur Mittelung:
Zur Bildung des Effektiv-Werts muss die momentane Leistung gemittelt werden. Das erledigt hier das Verzögerungs-Glied. Seine **Zeitkonstante T.mit** muss groß gegen die (längste) Periode t.0 des Leistungsflusses sein. Weil sowohl die positiven als auch die negativen Halb-Perioden positive Leistungen erzeugen, ist t.0 die Hälfte der Sinus-Periode. Die Frequenz des Leistungsflusses ist das Doppelte (bei Spannungen mit 50Hz pulsiert die Leistung mit 100Hz).

Je größer man die Mittelungs-Zeitkonstante T.mit gegen die **Signal-Periode t.0** macht, desto besser wird die Mittelung, desto länger muss man aber auch auf das Ergebnis warten. Ein oft akzeptabler Kompromiss ist **T.mit = 3·t.0**.